EERIE - ESA IGELEC - ESIGELEC

I C A R E

Un concours pour trois écoles

MATHS 2
FILIERES T, TA, TS

(Durée 4 heures)

EXERCICE

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1°) Montrer qu'elle est diagonalisable et déterminer une matrice de passage permettant la diagonalisation et ayant le plus possible de termes nuls, les autres étant +1 ou -1.

2°)

a) Calculer A^2

b) Etudier la diagonalisation de A^2 à partir de celle de A et retrouver le résultat précédent.

c) En déduire l'expression générale de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3°)

a) Déterminer les matrices P_i des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur les sous espaces propres E_i de A.

Montrer qu'elles vérifient $\begin{cases} P_i^2 = P_i \\ P_i P_j = O \ (i \neq j) \\ \sum_i P_i = I_4 \end{cases}$

b) Ecrire les matrices de ces projecteurs dans la base où A est diagonale.

c) En déduire que $A = \sum_i \lambda_i P_i$ ou λ_i est la valeur propre correspondant au sous espace propre E_i.

d) Retrouver ainsi l'expression de A^n.

PROBLEME

Dans tout le problème, on considère une matrice X à n lignes et p colonnes. Nous noterons X' la transposée de X et plus généralement u' le transposé d'un vecteur colonne u.

Les espaces R^n sont munis du produit scalaire usuel.

L'objet du problème est la reconstitution de la matrice X à l'aide d'un minimum de valeurs numériques.

1ère PARTIE

1°) Montrer que X est de rang 1 si et seulement si $X = u\,v'$ ou u est une matrice colonne à n composants et v une matrice colonne à p composants. On reconstitue alors X avec n+p valeurs.

2°)

a) Montrer que X est de rang q si et seulement si $X = \sum_{i=1}^{q} u_i v'_i$ ou u_i et v_i ont les caractéristiques de u et v du 1°).

b) Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Déterminer son rang et obtenir une décomposition en somme comme au a).

2ème PARTIE

On cherche à obtenir une approximation de X sous la forme $X = \sum_{i=1}^{q} u_i v'_i + E$ où E est une matrice résiduelle dont les termes sont suffisamment petits.

I. On considère la matrice X comme un tableau de n points de $\mathbb{R}^p$.

A) Si on suppose que ces n points sont contenus dans un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ de dimension q inférieure à p, combien de nombres sont alors nécessaires pour reconstituer X ?

B) On cherche à approcher les n points par leurs projections sur un sous espace F_1 de dimension 1 de $\mathbb{R}^p$ dont u est un vecteur unitaire.

1°)Que représentent les n lignes du vecteur Xu ?
En donner une interprétation géométrique.

2°)Montrer que pour approcher le "nuage" des n points par F_1 il est équivalent de minimiser la somme des carrés des distances à F_1 ou de maximiser la somme des carrés des projections sur F_1.

3°)Montrer que la somme des carrés des projections sur F_1 est donnée par la quantité u' X' Xu.

4°)On veut donc maximiser u' X' Xu sous la contrainte u' u = 1.
Soit alors $\varphi(u) = u' X' Xu - \lambda (u' u-1)$ où λ est un réel.

i) Ecrire la relation matricielle obtenue en annulant les dérivées partielles de φ par rapport aux composantes de u.
Que peut-on en déduire pour λ ?

ii) Montrer que λ est la valeur maximale cherchée. Caractériser alors le vecteur u cherché à l'aide des notions de valeurs propres et de vecteurs propres.
On notera u_1 le vecteur ainsi trouvé.

C) On recherche maintenant le meilleur sous espace de dimension 2.

1°)Montrer qu'il contient u_1.

2°) Montrer qu'il est obtenu en maximisant la forme quadratique t' X' X t. sous les contraintes $t' u_1 = 0$ et t' t = 1.

3°)En posant $\phi(t) = t' X' X t - \lambda(t' t-1) - \mu t' u_1$ et en utilisant le même procédé qu'au B) montrer que t doit vérifier la relation $2 X' X t - 2 \lambda t - \mu u_1 = 0$.

4°)Montrer que $\mu=0$ et en déduire que $X' X t = \lambda t$.
Caractériser alors le vecteur t comme au B) 4°) ii.
Soit u_2 le vecteur ainsi trouvé.

D) Montrer que l'on peut ainsi obtenir une base orthonormée du sous espace vectoriel de dimension q s'ajustant au mieux au "nuage".

II. On peut aussi considérer X comme un tableau de p points de R^n.

Montrer que le meilleur sous espace de dimension 1 ajustant ces p points est caractérisé par un vecteur unitaire v_1 satisfaisant $v'_1\ X\,X'\ v_1$ maximum avec $v'_1\ v_1 = 1$.

En déduire en utilisant les résultats de I une caractérisation de v_1.
On en déduit alors l'existence d'une base orthonormée $(v_1,\ldots, v_q)$ caractérisant le meilleur sous espace de dimension q de R^n ajustant le "nuage".

III. Relation entre les deux sous espaces.

On posera $X'\,X\,u_\alpha = \lambda_\alpha\,u_\alpha$ et $XX'\,v_\alpha = \mu_\alpha\,v_\alpha$.

r sera le rang du tableau X donc aussi de la matrice X X'.

1°) En prémultipliant les deux membres de la relation $XX'\,v_\alpha = \mu_\alpha\,v_\alpha$ par X' montrer qu'à chaque vecteur propre $v_\alpha(\alpha \le r)$ de XX' correspond un vecteur propre u_α de X'X relatif à la même valeur propre.

2°) En déduire que l'ensemble des valeurs de μ_α est un sous ensemble de celui des valeurs de λ_α et que $u_\alpha = k_\alpha\,X'\,v_\alpha$ ou k_α est une constante.

3°) Etablir alors en utilisant un raisonnement analogue que $\lambda_\alpha = \mu_\alpha$ et $v_\alpha = k'_\alpha\,X\,u_\alpha$ où k'_α est une constante.

4°) Sachant que u_α et v_α sont unitaires, déterminer k_α et k'_α.
Exprimer alors les relations entre u_α et v_α.

IV. Reconstitution de X.

1°) Montrer que la matrice X'X est diagonalisable.

2°) En partant de la relation : $Xu_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}\,v_\alpha$ montrer que

$$X\left\{\sum_{\alpha=1}^{p} u_\alpha\,u'_\alpha\right\} = \sum_{\alpha=1}^{p}\sqrt{\lambda_\alpha}\ \ v_\alpha\,u'_\alpha$$

3°) En déduire que $X = \sum_{\alpha=1}^{p}\sqrt{\lambda_\alpha}\,v_\alpha\,u'_\alpha$.

4°) On obtient ainsi une reconstitution approchée X* de X par $X^* = \sum_{\alpha=1}^{q}\sqrt{\lambda_\alpha}\,v_\alpha\,u'_\alpha$
en utilisant les q premiers vecteurs propres v_α et u_α.
Quel est alors le nombre de valeurs nécessaires pour reconstituer X ?